Mathematica-Notebook PlanckX.nb

Intensitätsberechnungen mit der Stefan-Boltzmannschen und Planckschen Strahlungsformel für den Vortrag in Gummersbach am 20. 2. 2005 (Ausdruck vom 28. 2. 2007).

Prof. Dr. Gerhard Gerlich, Institut für Mathematische Physik,
Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig,
38106 Braunschweig, Mendelssohnstr. 3.

```
h=6.6252 10^(-27); k=1.38044 10^(-16);c=2.99793 10^10;
sigma=(2*N[Pi^5]*k^4)/(15.*c^2*h^3);f=215.;
PlanckUL[lambda_,temp_]:=(8*N[Pi]*h*c)/
        (lambda^5*(Exp[(h*c)/(k*lambda*temp)]-1));
PlanckIntL[lambda_,temp_]:=(2*N[Pi]*h*c^2)/
        (lambda^5*(Exp[(h*c)/(k*lambda*temp)]-1));

PlanckUF[nue_,temp_]:=
        (8*N[Pi]*h*nue^3)/(c^3*(Exp[(h*nue)/(k*temp)]-1));
PlanckIntF[nue_,temp_]:=(2*N[Pi]*h*nue^3)/
        (c^2*(Exp[(h*nue)/(k*temp)]-1));

StefanBoltzmann[temp_]:= sigma*temp^4;
```

Man erkennt an den Exponenten für die Plancksche Konstante, Boltzmannsche Konstante und Lichtgeschwindigkeit, daß hier cgs-Einheiten benutzt werden.

f ist das Verhältnis vom Erbahnradius zum Sonnenradius

Aus der Energiedichte u (UL und UF) erhält man durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit und Division mit 4π die Intensität pro Raumwinkeleinheit (IntL und IntF), die durch Multiplikation mit π zur Intensität in den Halbraum wird.

```
NIntegrate[PlanckIntL[x,5780.]/f^2, {x, .000001, .01}]
NIntegrate[PlanckIntF[x,5780.]/f^2, {x, c/.01, c/.000001}]
BoltzmannSonne=sigma*5780^4/f^2
```

1.36884×10^{6}

1.36884×10^{6}

1.36884×10^{6}

cgs-Leistung =10^-7 Watt=10^-10 kW, also

cgs-Intensität=cgs-Leistung/cm^2
=10^4 cgs-Leistung/m^2
=10^-3 Watt/m^2=10^-6 kW/m^2.

Man erhält also als Strahlungsintensität der Sonne bei der Erdbahn 1.37 kW/m^2.

```
NIntegrate[PlanckIntL[x, 290.], {x, .00003, 1.}]
NIntegrate[PlanckIntF[x, 290.], {x, c/1., c/.00003}]
BoltzmannErde = sigma * 290^4
```

400969.

400969.

400969.

Man erhält also für die maximale Gesamtstrahlung des Bodens nur 0.4 kW/m^2.

```
AbsorbPlanckInt[Temp_] :=
 NIntegrate[PlanckIntL[x, Temp], {x, .00004, .00008}] +
  NIntegrate[PlanckIntL[x, Temp], {x, .0003, .0005}]
```

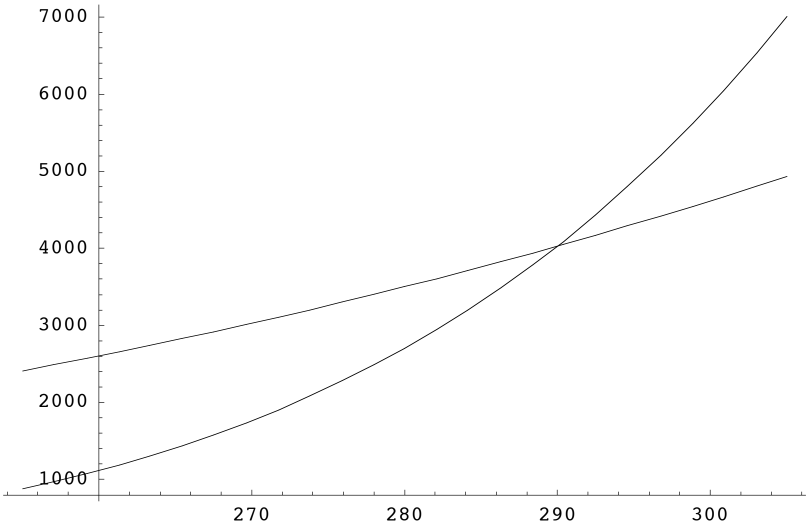
```
AbsorbPlanckInt[290]
AbsorbSigma = AbsorbPlanckInt[290] / 290^4
sigma
```

4029.48

5.69715×10^{-7}

0.0000566915

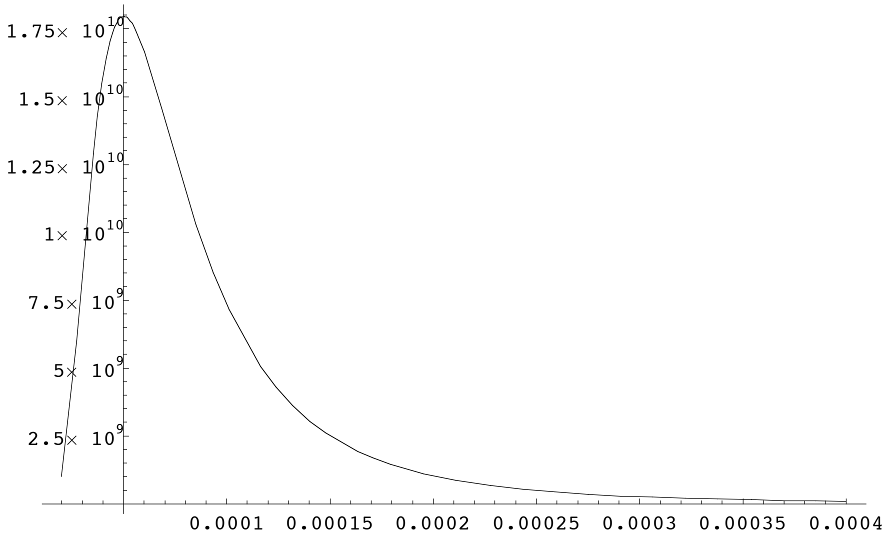
```
Plot[{AbsorbPlanckInt[x],
  AbsorbSigma / sigma * StefanBoltzmann[x]},
 {x, 255, 305}, PlotRange → All]
```



- Graphics -

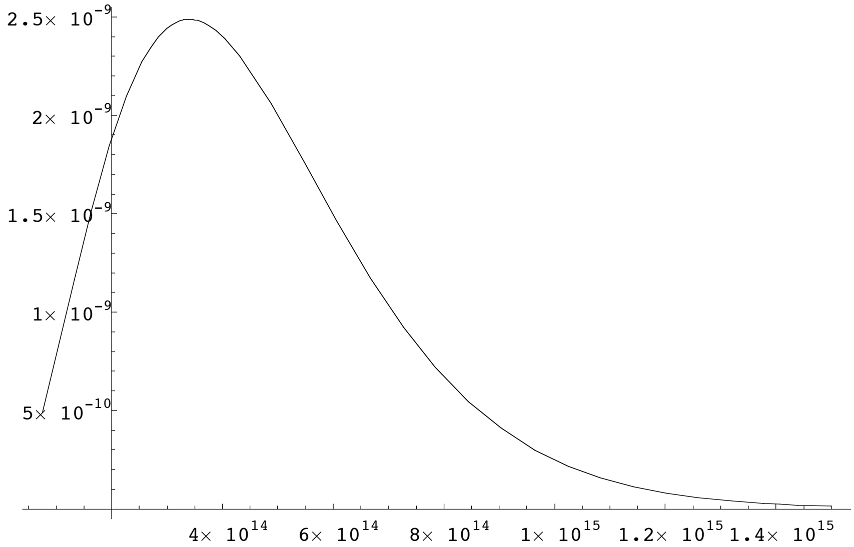
AbsorbPlanck[x] ergibt die steilere Kurve. Durch eine wellenlängenabhängige Absorption (nicht-schwarze Körper) verliert das T^4-Gesetz seine Gültigkeit!

```
Plot[PlanckIntL[x,5780.]/f^2,{x, .00002, .0004},
PlotRange->All]
```



- Graphics -

```
Plot[PlanckIntF[x,5780.]/f^2,{x, c/.0004,
c/.00002},PlotRange->All]
```



- Graphics -

```
Frequenz1=c/.00004
FrequenzM=c/.00005
Frequenz2=c/.00007
```

7.49483×10^{14}

5.99586×10^{14}

4.28276×10^{14}

```
NIntegrate[PlanckIntL[x,5780.]/f^2, {x, .00004, .00007}]
Print[(%*100" Prozent")/BoltzmannSonne];
```

502016.

36.6745 Prozent

```
NIntegrate[PlanckIntL[x,5780.]/f^2, {x, .00007, .035}]
Print[%/BoltzmannSonne*100" Prozent"];
```

699286.

51.086 Prozent

```
NIntegrate[PlanckIntL[x, 5780.] / f^2, {x, .000001, .00004}]
NIntegrate[PlanckIntF[x, 5780.] / f^2, {x, c / .00004, c / .000001}]
Print[% / BoltzmannSonne * 100 " Prozent"];
```

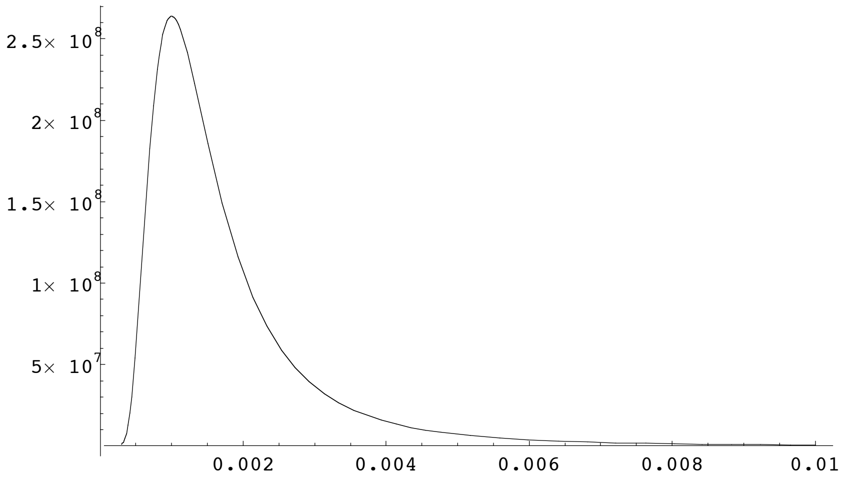
```
167538.
```

```
167538.
```

```
12.2394  Prozent
```

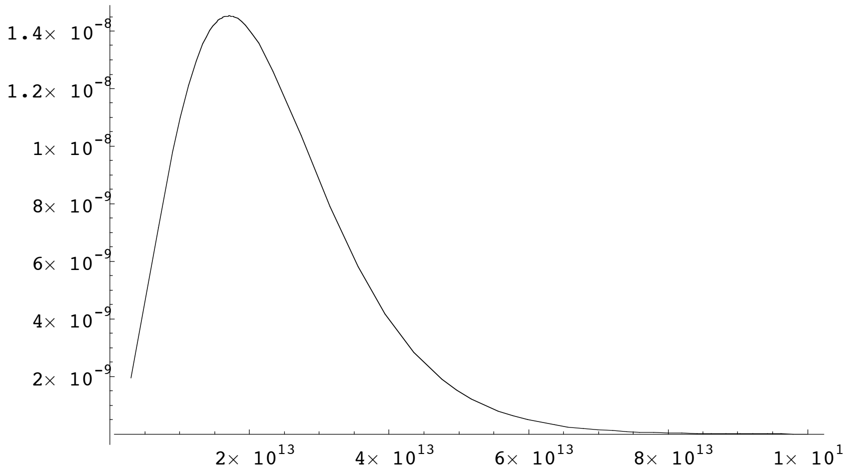
Von der Intensität der Sonnenstrahlung liegen also
37% im sichtbaren
51% im ultraroten und
12% im ultravioletten Bereich des Spektrums

```
Plot[PlanckIntL[x,290.],{x, .0003, .01},PlotRange->All]
```



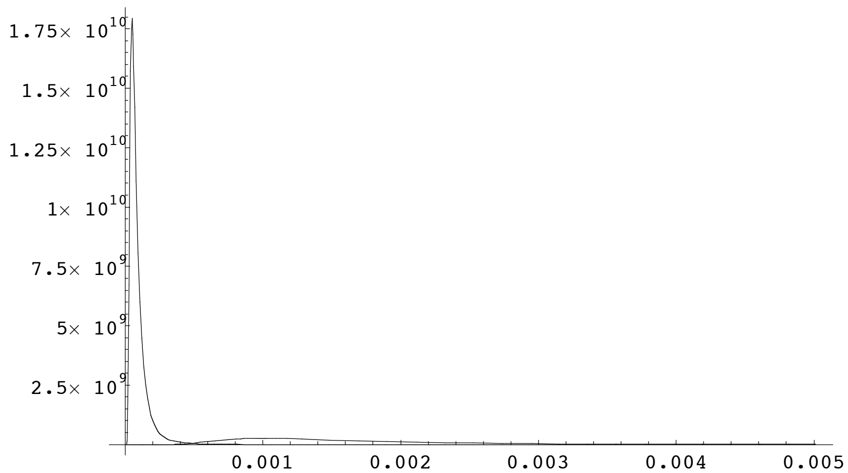

```
- Graphics -
```

Plot[PlanckIntF[x,290.],{x, c/.01, c/.0003},PlotRange->All]



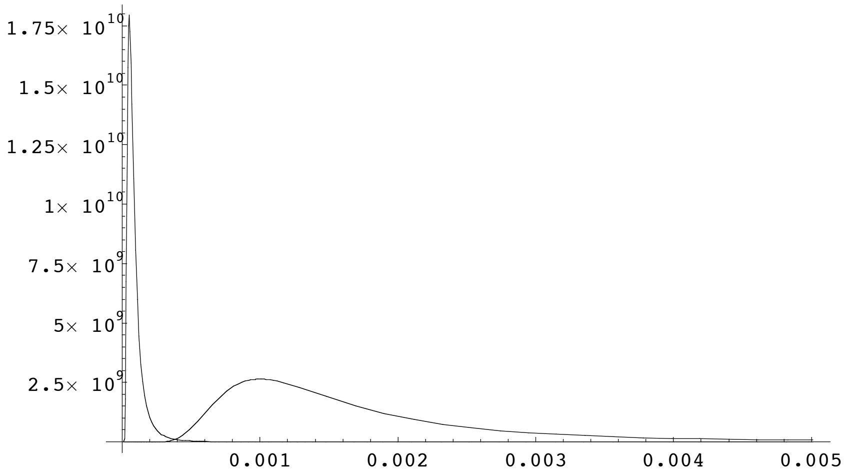
- Graphics -

Plot[{ PlanckIntL[x,5780.]/f^2, PlanckIntL[x,290.]},{x,10.^-5, 10.^-2.3}, PlotRange->All]



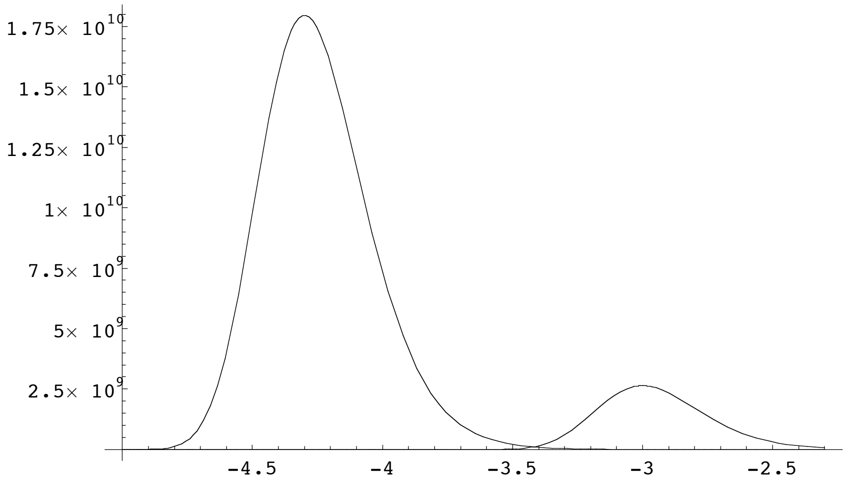
- Graphics -

```
Plot[{ PlanckIntL[x,5780.]/f^2, 10*PlanckIntL[x,290.]},{x,10.^-5, 10.^-2.3}, PlotRange->All]
```



- Graphics -

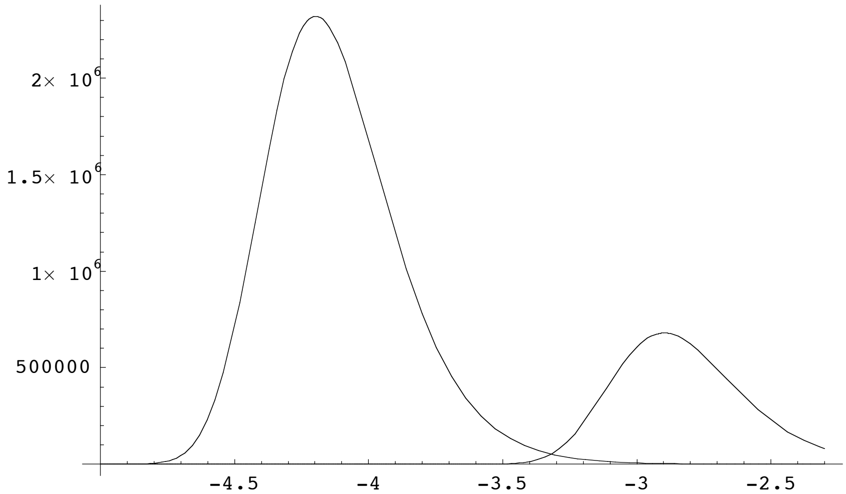
```
Plot[{ PlanckIntL[10^x,5780.]/f^2, 10*PlanckIntL[10^x,290.]},{x,-5, -2.3}, PlotRange->All]
```



- Graphics -

Erst wenn man eine logarithmische Darstellung wählt und die maximale Bodenstrahlung mit zehn multipliziert, kann man sie sinnvoll zusammen mit der Strahlungsintensität der Sonne bei der Erdbahn in ein Diagramm zeichnen.

```
Plot[{Log[10]*10^x*PlanckIntL[10^x,5780.]/f^2,
Log[10]*10^x*PlanckIntL[10^x,290.]}, {x,-5., -2.3},
PlotRange->All]
```

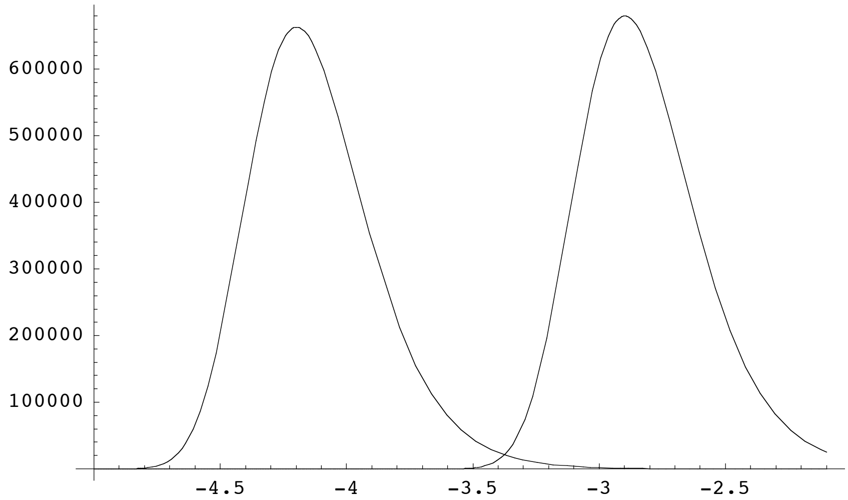


- Graphics -

Hier sind die Ordinaten so umskaliert worden,daß in der logarithmischen Darstellung gleiche Flächen gleiche Intensitäten darstellen. Aber auch hier ist die maximale Bodenstrahlung deutlich kleiner als die Intensität der Sonnenstrahlung bei der Erdbahn.

(Abszisse:Zehnerlogarithmus der Wellenlänge)

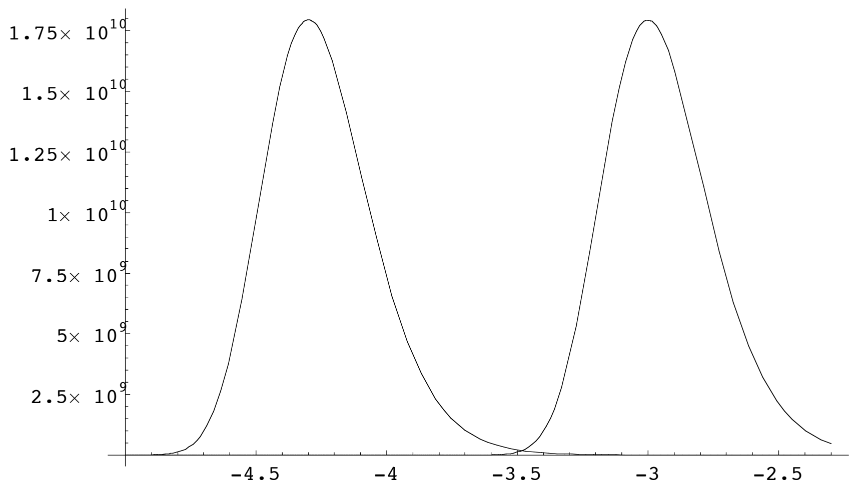
```
Plot[{Log[10]*10^x*PlanckIntL[10^x,5780.]/f^2/3.5,
Log[10]*10^x*PlanckIntL[10^x,290.]},{x,-5, -2.1},
PlotRange->All]
```



- Graphics -

Man mußte die Sonnenstrahlung bei der Erdbahn durch 3,5 teilen, damit man (mit der logarithmischen Abszisse) gleich aussehende Kurven erhält, wenn gleiche Flächen gleiche Intensitäten sind. Auf die Vortragsfolien war versehtlich das hier folgende äußerlich gleich aussehende Diagramm geraten, bei der die Bodenstrahlung in dem ursprünglichen Diagramm statt mit 10 mit 68 multipliziert wurde:

```
Plot[{PlanckIntL[10^x, 5780.] / f^2, 68 * PlanckIntL[10^x, 290.]},
  {x, −5, −2.3}, PlotRange → All]
```



- Graphics -

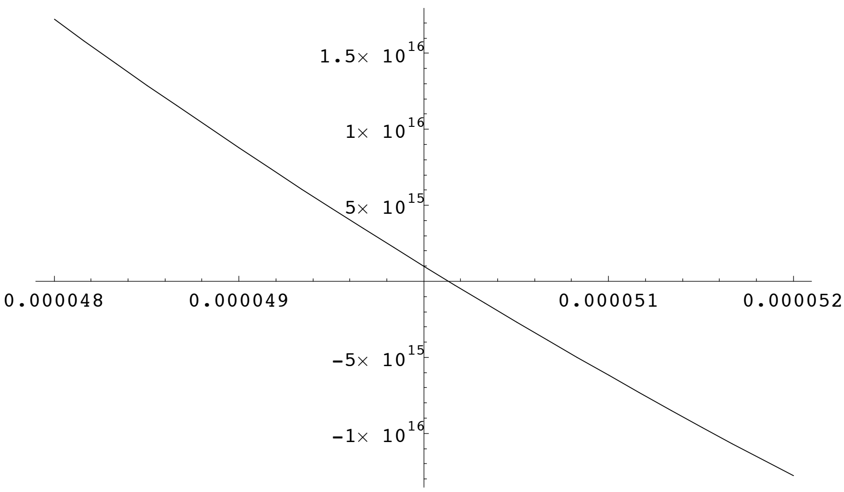
```
D[PlanckIntL[x,temp],x]
```

$$\frac{0.0000538301\, e^{\frac{1.43881}{\text{temp}\, x}}}{\left(-1+e^{\frac{1.43881}{\text{temp}\, x}}\right)^2 \text{temp}\, x^7} - \frac{0.000187065}{\left(-1+e^{\frac{1.43881}{\text{temp}\, x}}\right) x^6}$$

```
PlanckAblLambda[x_, temp_] :=
```

$$\frac{0.000053830050096148\text{`}\, e^{\frac{1.4388083390802937\text{`}}{\text{temp}\, x}}}{\left(-1+e^{\frac{1.4388083390802937\text{`}}{\text{temp}\, x}}\right)^2 \text{temp}\, x^7} - \frac{0.00018706470012036869\text{`}}{\left(-1+e^{\frac{1.4388083390802937\text{`}}{\text{temp}\, x}}\right) x^6}$$

```
Plot[PlanckAblLambda[x,5780.]/f, {x, .000048, .000052},PlotRange->All]
```



- Graphics -

```
FindRoot[PlanckAblLambda[x, 5780.] == 0, {x, .000052}]
```

$\{x \to 0.0000501356\}$

Das Maximum der Wellenlängendichte liegt im sichtbaren Bereich bei 0.5 μm!

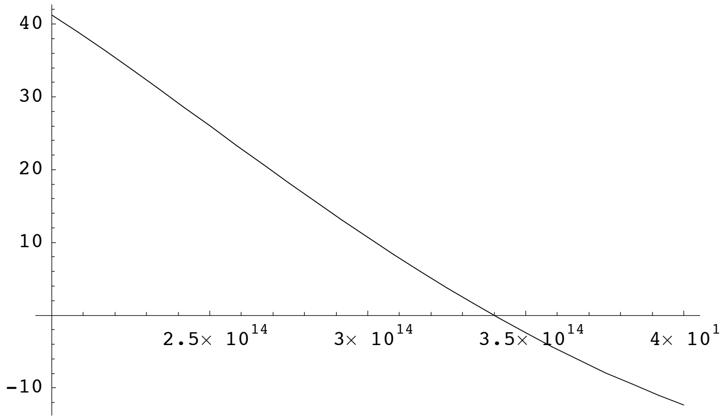
```
D[PlanckIntF[x,temp],x]
```

$$\frac{1.3895\times 10^{-46}\, x^2}{-1+e^{\frac{4.79934\times 10^{-11}\, x}{\text{temp}}}} - \frac{2.22289\times 10^{-57}\, e^{\frac{4.79934\times 10^{-11}\, x}{\text{temp}}}\, x^3}{\left(-1+e^{\frac{4.79934\times 10^{-11}\, x}{\text{temp}}}\right)^2 \text{temp}}$$

```
PlanckAblFrequenz[x_, temp_] :=
```

$$\frac{1.3894954854686858\text{`*\^{}-46}\, x^2}{-1+e^{\frac{4.799339341079656\text{`*\^{}-11}\, x}{\text{temp}}}} - \frac{2.2228867825541466\text{`*\^{}-57}\, e^{\frac{4.799339341079656\text{`*\^{}-11}\, x}{\text{temp}}}\, x^3}{\left(-1+e^{\frac{4.799339341079656\text{`*\^{}-11}\, x}{\text{temp}}}\right)^2 \text{temp}}$$

```
Plot[PlanckAblFrequenz[x,5780.]*10^20, {x, 2*10^14,
4*10^14},PlotRange->All]
```




```
- Graphics -
```

```
FindRoot[PlanckAblFrequenz[x,5780.]*10^20==0.,
{x, 2*10^14}]
```

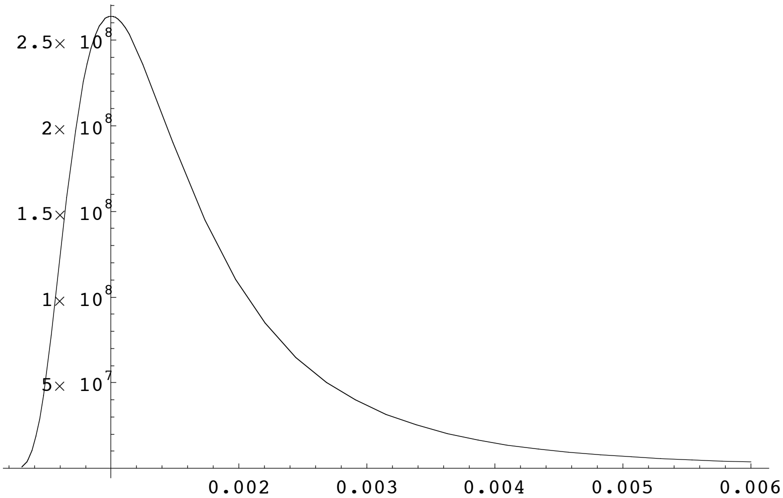
$\{x \to 3.39795 \times 10^{14}\}$

```
c / 3.3979509286369556`*^14
```

0.0000882276

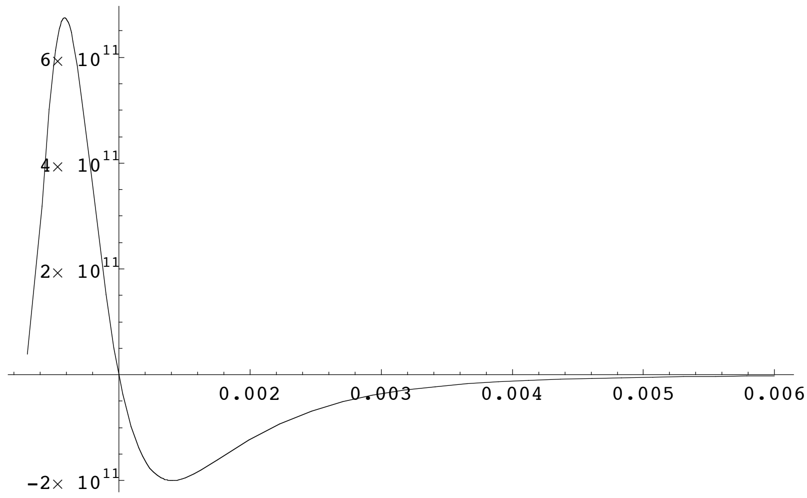
Das Maximum der Frequenzdichte liegt im infraroten Bereich bei der Wellenlänge 0.88 μm!

```
Plot[PlanckIntL[x,290.],{x, .0003, .006},PlotRange->All]
```



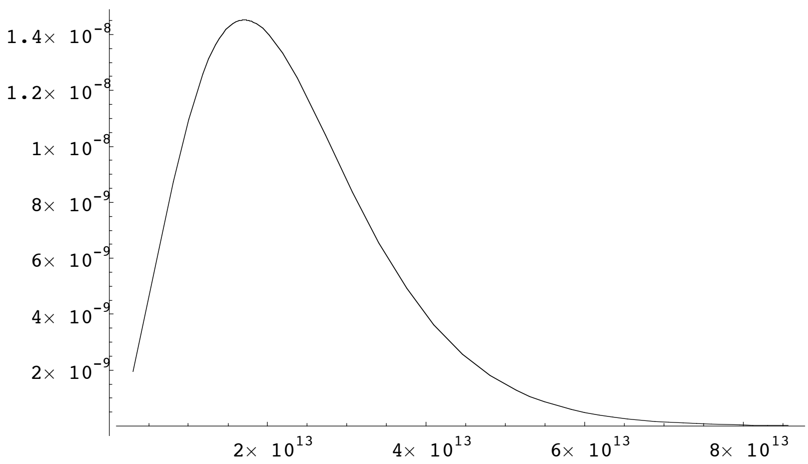

```
- Graphics -
```

```
Plot[PlanckAblLambda[x,290.], {x, .0003, .006},PlotRange->All]
```



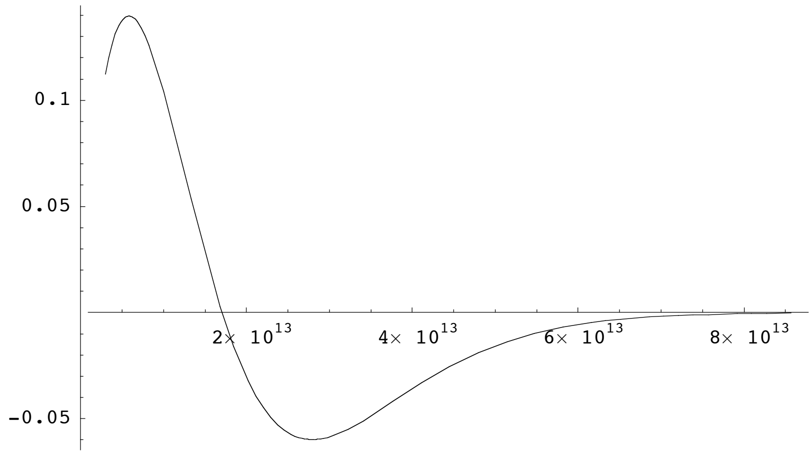
- Graphics -

Plot[PlanckIntF[x, 290.], {x, c / .01, c / .00035}, PlotRange → All]



- Graphics -

Plot[PlanckAblFrequenz[x, 290.] * 10^20,
{x, c/.01, c/.00035}, PlotRange → All]



- Graphics -

FindRoot[PlanckAblLambda[x,290.] == 0., {x,.001}]

{x → 0.000999254}

FindRoot[PlanckAblFrequenz[x,290.]*10^20==0., {x,1.7*10^13}]

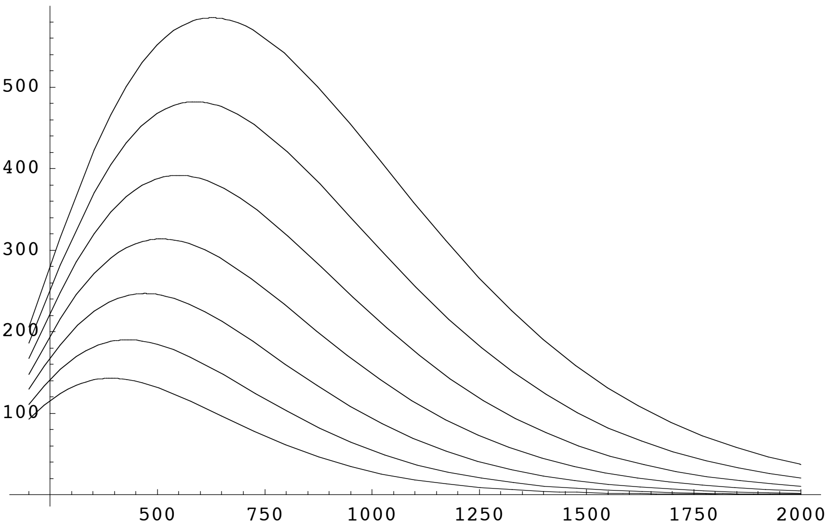
{x → 1.70485 × 10^{13}}

c/1.7048542720803662`*^13

0.00175847

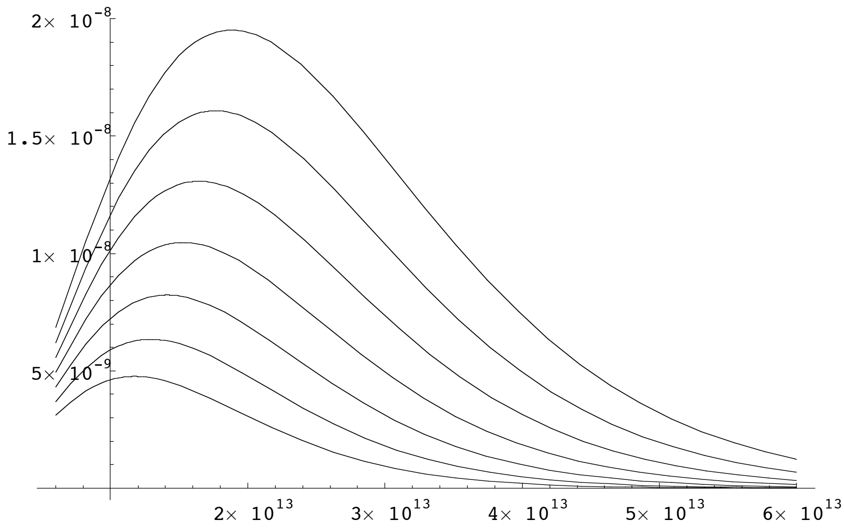
Die Maxima der maximalen Bodenstrahlung liegen für die Wellenlängendichte bei 10 μm und für die Frequenzdichte bei der Wellenlänge von 17.6 μm. Die Wellenlänge des Maximums der Frequenzdichte ist das 1.76-fache der Wellenlänge des Maximums der Wellenlängendichte. Meist gibt man für die Bodenstrahlung die Kurven für die Wellenzahldichte an:

```
Plot[{c*PlanckIntF[c*x,200.],c*PlanckIntF[c*x,220.],
        c*PlanckIntF[c*x,240.],c*PlanckIntF[c*x,260.],
        c*PlanckIntF[c*x,280.],c*PlanckIntF[c*x,300.],
        c*PlanckIntF[c*x,320.]},
        {x, 200, 2000},PlotRange->All]
```




```
- Graphics -
```

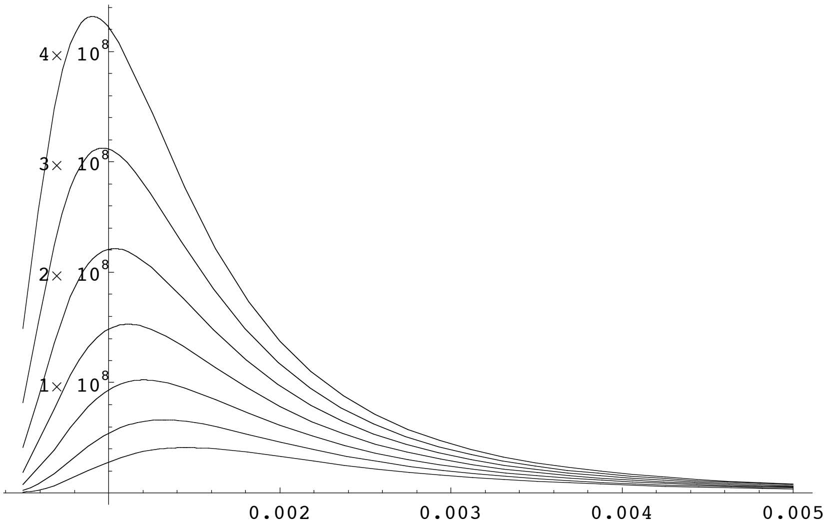
```
Plot[{PlanckIntF[x,200.],PlanckIntF[x,220.],PlanckIntF[x,240.],
PlanckIntF[x,260.],PlanckIntF[x,280.],PlanckIntF[x,300.],
PlanckIntF[x,320.]},{x, c/.005, c/.0005},PlotRange->All]
```




```
- Graphics -
```

Frequenzdichten der Intensität für die maximale Bodenstrahlung von 200 bis 320 K in Schritten von 20K.

```
Plot[{PlanckIntL[x,200.],PlanckIntL[x,220.],PlanckIntL[x,240.],PlanckIntL[x,260.],PlanckIntL[x,280.],PlanckIntL[x,300.],
PlanckIntL[x,320.]},{x,.0005, .005},PlotRange->All]
```



- Graphics -

Wellenlängendichten der Intensität für die maximale Bodenstrahlung von 200 bis 320 K in Schritten von 20K.

Wenn die Bodenstrahlung an die Planckfunktionen angepaßt wird, wird meist die Darstellung mit den Wellenzahldichten gewählt (die Wellenzahl ist die reziproke Wellenlänge), wobei die Ordinatenwerte noch durch π geteilt werden und deshalb eine Intensitätsdichte pro Raumwinkeleinheit angegeben wird. Es gibt kein Meßgerät, das diese Kurven direkt messen könnte.